

شناخت الگوهای کوانتومی نوفه‌دار به وسیله الگوریتم جستجوی گراور و با حل تحلیلی معادله

تحول در فرم لیندبلاد

رضایی فرد بوساری، عماد^۱؛ آقاییار، کوروش^۱

دانشکده علوم، گروه فیزیک دانشگاه ارومیه، ارومیه^۱

چکیده

در این مقاله شناسایی الگوهای کوانتومی نوفه‌دار به وسیله سیستم کوانتومی و با استفاده از الگوریتم جستجوی گراور به بررسی شده است. به منظور تحلیل اثرات نوفه از حل تحلیلی معادله تحول در فرم لیندبلاد برای دو برهم نهی متفاوت استفاده شده است. این محاسبات در شبکه‌های عصبی و هوش مصنوعی مفید است.

Quantum noisy pattern recognition with Grover's search algorithm And analytical solution of master equation in Lindblad form

Rezaei Fard Boosari, Emad¹; Aghayar, Korosh¹

Faculty of science, Department of Physics, University of urmia¹

Abstract

In this study, we investigated quantum noisy pattern recognition with Grover's search algorithm. In order to analyze the effects of noise, we used master equation in Lindblad form for two different quantum superpositions. This calculation is useful in neural networks and Artificial Intelligence.

PACS No.80, 89

مقدمه

شناخت الگو^۱ مورد توجه شاخه‌های بسیاری از جمله علوم کامپیوتر و زیست‌شناسی قرار دارد. شناخت الگو به وسیله شبکه‌ها عصبی مصنوعی و حافظه‌های انجمنی^۲ در هوش مصنوعی برای شناسایی چهره [۱] و دست‌خط و همچنین شناخت سلول‌های سرطانی توسط پژوهشگران علوم کامپیوتری و زیستی به کار رفته است.

یکی از مستقیم‌ترین روش‌های شناسای الگو روش جستجوی داده-ها است که روشی سخت و زمان بر برای شناسایی الگوی مناسب می‌باشد [۲]. جستجوی کوانتوی به وسیله الگوریتم گراور یکی از روش‌هایی است که می‌تواند به دلیل بهره‌گیری از "توازی

کوانتومی" به فرایند جستجو سرعت ببخشد. ایده استفاده از الگوریتم جستجوی کوانتومی برای شناسایی الگو جدید نیست و در گذشته شناسایی الگوهای بدون نوفه توسط سیستم‌های کوانتومی به وسیله الگوریتم جستجوی گراور انجام شده است [۳]. در این مقاله شناسایی الگو در حضور نوفه‌های محیط برای دو برهم نهی شامل و غیرشامل انجام شده است که تا به حال انجام نشده بود. این موضوع به این دلیل از اهمیت برخوردار است که اثرات ناهمدوسی [۴] می‌تواند شناخت الگوها را دچار مشکل کند. به منظور بررسی اثرات نوفه بر روی الگوهای کوانتومی از حل تحلیلی معادله لیندبلاد استفاده شده است و نتایج بدست آمده از حل معادله تحول سیستم، پایداری احتمال شناسایی الگوها را بر اساس نوع برهم نهی و نوع نوفه‌های محیط به خوبی نشان می‌دهد.

^۱ - Pattern recognition

^۲ - Associative memory

مسئله شناخت الگو:

که \hat{I} عملگر یکانی است. پس از $\frac{\pi\sqrt{N}}{4}$ مرتبه تکرار عملگر \hat{G} بر روی حالت $|\psi_0\rangle$ حالت نهایی را اندازه گیری می کنیم ($N=2^n$).

شناخت الگوهای نوفه دار توسط الگوریتم گراور

مجموعه‌ای شامل دو عضو $S := \{(000), (111)\}$ داده شده است، که اعضای آن الگوهای مورد نظر برای شناسایی هستند. برای کدگذاری این الگوها از یک سیستم سه کیوبیتی استفاده می شود که اعضای مجموعه با کت‌ها حالت $S_0 := \{|000\rangle, |111\rangle\}$ نشان داده شده اند. در این جا لازم است به این نکته اشاره شود که الزامی در باینری بودن اعضای مجموعه S وجود ندارد و اعضای آن می تواند هر شی دلخواهی باشند؛ که در این صورت ابتدا اشیا به صورت کدهای باینری کد می شوند و سپس کدگذاری کوانتومی انجام می گیرد. حال بر اساس الگوهای تعیین شده توسط مجموعه S دو نوع جستجو انجام می گیرد که یکی بر اساس الگوهای موجود در مجموعه است و دیگری بر اساس الگوهایی که در مجموعه موجود نیستند که به ترتیب با نام های "شامل" و "غیر شامل" مشخص می شوند.

برهم نهی "شامل" به صورت زیر معرفی می شود:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{(x_i, y_i) \in S} |x_i, y_i\rangle \quad (4)$$

که m تعداد اعضای موجود در مجموعه S است. همچنین برهم نهی "غیرشامل" نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n - m}} \sum_{(x_i, y_i) \notin S} |x_i, y_i\rangle \quad (5)$$

که m همانند قبل تعداد اعضای مجموعه S و n تعداد کیوبیت های تشکیل دهنده سیستم اصلی است. باید توجه داشت که این حالت ها برای شناسایی الگو جانشین حالت معرفی شده در معادله (1) الگوریتم گراور می شوند. برای یک سیستم دارای سه کیوبیت این حالت ها به صورت زیر در می آیند

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle) \quad (6)$$

و برای حالت "غیرشامل" برابر خواهد بود با

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|00,1\rangle + |01,0\rangle + |01,1\rangle + |10,0\rangle + |10,1\rangle + |11,0\rangle) \quad (7)$$

تفاوت این دو حالت با حالت اولیه الگوریتم گراور این است که

شناخت الگو یکی از شاخه های یادگیری ماشینی^۳ است که در آن داده ها به صورت خام و نامظم دریافت می شود و براساس دسته بندی ها تصمیم نهایی در مورد آنها گرفته می شود [5]. شناخت الگو یکی از زمینه هایی است که شناسایی الگو به صورت نظارت شده^۴ در آن صورت می گیرد. باید توجه داشت که شناسایی الگو به معنی دسته بندی الگو در کلاس های شناخته شده نیز تعبیر می شود [5]. در مکانیک کوانتومی نیز به همین صورت با الگوها رفتار می شود. بدین ترتیب اطلاعات خام ورودی به یک فضای هیلبرت مناسب با تعداد پایه های فضای مورد نیاز نگاشت داده می شود و به این ترتیب اطلاعات مربوط به الگوها در هر یک از پایه های فضا کدگذاری می شوند. و سپس با استفاده از جستجوی کوانتومی، الگوی مورد نظر از میان سایر الگوها بازشناخته می شود. در بخش بعد خلاصه ای از الگوریتم جستجوی گراور بیان شده است.

الگوریتم گراور:

الگوریتم گراور [6] روش مستقیمی برای دسته بندی و شناسایی الگوهای مجموعه ای مانند S است. الگوریتم گراور را می توان به مراحل زیر تقسیم کرد:

ابتدا آماده سازی حالت اولیه برای سیستم n کیوبیتی به صورت:

$$|\psi_0\rangle = H^{\otimes n} |\bar{0}\rangle \quad (1)$$

که $H^{\otimes n} = H \otimes H \dots \otimes H$ و $|\bar{0}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \dots \otimes |0\rangle$ است. حالت $|\psi_0\rangle$ یک برهم نهی از تمام حالت ها موجود در فضای هیلبرت سیستم است، که در این برهم نهی دامنه احتمال برای تمام حالت ها یکسان است، سپس اعمال عملگر گراور \hat{G} بر روی $|\psi_0\rangle$ به منظور یافتن حالت مورد نظر $|z\rangle$. عملگر گراور به صورت $\hat{G} = \hat{D}\hat{R}$ تعریف میشود، که عملگر \hat{D} و \hat{R} عبارتند از:

$$\hat{D} = \hat{I} - |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \quad (2)$$

$$\hat{R} = \hat{I} - \sum_{z \in A} |z\rangle\langle z| \quad (3)$$

^۳ - Machine Learning

^۴ - Supervised Learning

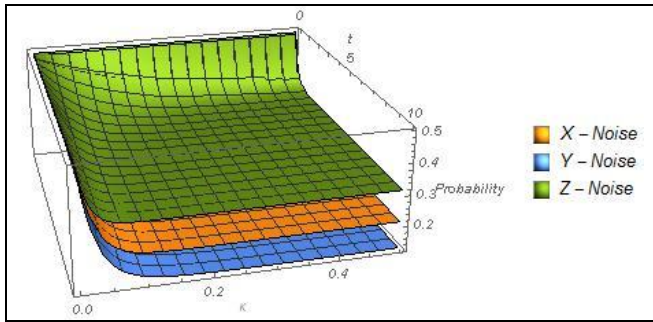
و برای نوفه $L_{1,z} = \sqrt{\kappa_{1,z}(t)}\sigma_z^{(1)}, L_{2,z} = \sqrt{\kappa_{2,z}(t)}\sigma_z^{(2)}$ با فرض $\kappa_{1,z} = \kappa_{2,z} = \kappa$ بدست می‌آید:

$$\frac{1}{32}(4 + 3e^{-6\kappa t} + 6e^{-4\kappa t} + 3e^{-2\kappa t}) \quad (10)$$

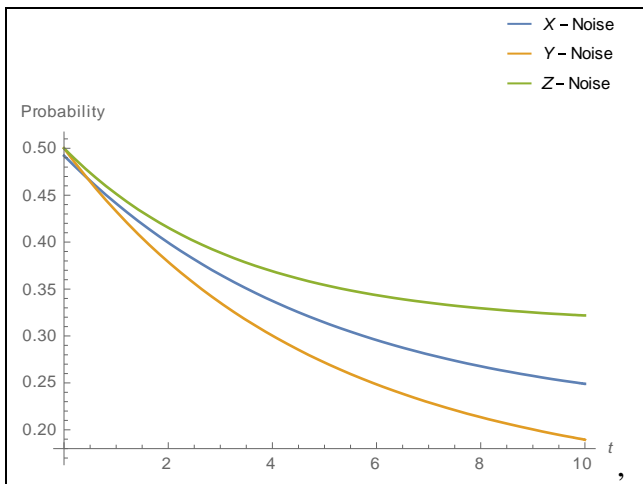
و برای نوفه $L_{1,y} = \sqrt{\kappa_{1,y}(t)}\sigma_y^{(1)}, L_{2,y} = \sqrt{\kappa_{2,y}(t)}\sigma_y^{(2)}$ با فرض $\kappa_{1,z} = \kappa_{2,z} = \kappa$ حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{16}(5 + 3e^{-6\kappa t}) \quad (11)$$

شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب تحول زمانی بیشینه‌ی احتمال شناسایی درست الگوی (000) را در حضور نوفه‌های مختلف در سه بعد و دو بعد نشان می‌دهد که در نمودار دو بعدی به ازای $\kappa = 0.05$ است.



شکل ۱- شناسایی الگوها در حالت "شامل" در تکرار دوم الگوریتم گراور (بیشینه احتمال) را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که احتمال یافت برای تمامی حالت‌ها با افزایش t و κ کاهش می‌یابد.



شکل ۲- شناسایی الگوی (000) را در حضور نوفه‌های مختلف نشان می‌دهد و بیان می‌دارد که نوفه در راستای Z کمترین اثر را بر روی شناسایی الگوها دارد. همچنین هرچه زمان به سمت جلو می‌رود احتمال‌های شناسایی برای تمامی نوفه‌ها کاهش می‌یابد.

به همین صورت برای حالت "غیرشامل" اگر حالت اولیه الگوریتم گراور به صورت (۷) فرض شود برای نوفه

این دو دارای توزیع احتمال یکنواختی نیستند. این حالت‌ها را می‌توان با ماتریس چگالی به صورت $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ نشان داد که برای بررسی اثرات نوفه مناسب تر است. لازم به ذکر است که اثرات ناهمدوسی ناشی از درگاه‌های کوانتومی مختلف بر روی الگوریتم گراور توسط عملگرهای کرواس بررسی شده است [۷-۸]. این مقاله به بررسی اثرات نوفه محیط بر روی برهم‌نهی‌های مختلف از الگوهای کوانتومی می‌پردازد که از حل تحلیلی معادله تحول در فرم لیندبلاد بدست می‌آید.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H_s, \rho] + \sum_{i,\alpha} \left(L_{i,\alpha} \rho L_{i,\alpha}^\dagger - \frac{1}{2} \{L_{i,\alpha}^\dagger L_{i,\alpha}, \rho\} \right) \quad (8)$$

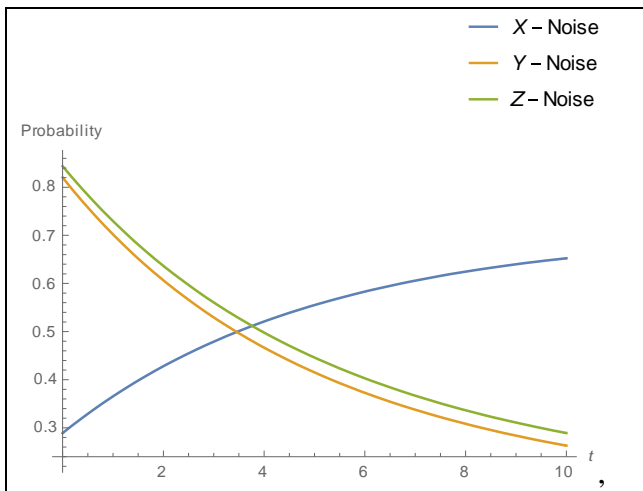
که ρ ماتریس چگالی سیستم اصلی است و $L_{i,\alpha} = \sqrt{\kappa_{i,\alpha}(t)}\sigma_\alpha^{(i)}$ عملگرهای لیندبلاد هستند که اثر ناهمدوسی را بر روی کیوبیت i ام نشان می‌دهند. $\sigma_\alpha^{(i)}$ ماتریس های پاولی هستند که بر روی کیوبیت i ام در راستاهای $\alpha = x, y, z$ اثر می‌کنند. H_s نشان دهنده هامیلتونی سیستم است که برای حل تحلیلی از برهم‌کنش‌های آن صرف نظر شده است ($H_s = 0$).

ابتدا حالت "شامل" را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف، شناسایی اعضای مجموعه S به وسیله روش جستجو است. برای این منظور از حالت اولیه (۶) برای الگوریتم جستجوی گراور استفاده می‌شود. سپس نوفه‌های محیط که دربخش قبل معرفی شدند بر روی حالت اولیه سیستم اثر می‌کنند و اطلاعات موجود در ماتریس چگالی آن را تغییر می‌دهند و در انتها حالت سیستم پس از حل معادله لیندبلاد وارد الگوریتم گراور می‌شود. نتایج آن بر حسب احتمال بیان می‌شود، به این صورت که بیشینه احتمال برای شناسایی الگو (تکرار دوم الگوریتم، برای سیستم سه کیوبیتی براساس پیش-بینی الگوریتم [۴]) با اندازه گیری سیستم بدست آورده می‌شود.

نتایج بدست آمده از الگوریتم گراور برای نوفه $L_{1,x} = \sqrt{\kappa_{1,x}(t)}\sigma_x^{(1)}, L_{2,x} = \sqrt{\kappa_{2,x}(t)}\sigma_x^{(2)}$ الگوی (000) در تکرار دوم و با فرض $\kappa_{1,x} = \kappa_{2,x} = \kappa$ عبارت است از:

$$\frac{9}{128}(3 + 4e^{-4\kappa t}) \quad (9)$$

دار با حل تحلیلی معادله تحول در فرم لیندبلاد برای دو برهم‌نهی متفاوت به انجام رسید و نتایج به خوبی نشان داد که برای برهم‌نهی "غیرشامل" پایداری در برابر نوفه‌ها بیشتر است و پیشنهاد می‌شود که از این برهم‌نهی برای شناخت الگو استفاده شود. همچنین مشخص شد که نوفه در راستای Z کمترین تاثیر بر روی احتمال موفقیت در شناسایی الگوها دارد. نتایج بدست آمده از برهم‌نهی غیرشامل نشان داد که هرچند احتمال موفقیت در شناسایی الگو برای نوفه در راستای X کمتر از راستای Z است اما سیستم از خود پایداری بالایی را نشان می‌دهد و با افزایش نوفه و زمان به مقدار ثابتی میل می‌کند که می‌تواند نتیجه بسیار مهمی تلقی شود.



شکل ۴- تحول زمانی سیستم "غیر شامل" در $\kappa = 0.05$ را نشان می‌دهد. در این نمودار به خوبی دیده می‌شود که نوفه در راستای X کاملاً برخلاف نوفه در راستاهای Z و Y رفتار می‌کند.

مرجع‌ها

- [1] T. Ahonen, H. Abdenour, P. Matti; "Face recognition with local binary pattern"; Computer Vision-ECCV Springer Berlin Heidelberg. (2004) 469-481.
- [2] G. Dougherty, "Pattern recognition and classification: an introduction"; Springer Science & Business Media, (2012).
- [3] D. Ventura; "Pattern Classification Using a Quantum System"; JCIS. (2002) 537-540.
- [4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang; "Quantum computation and quantum information"; Cambridge university press, (2010).
- [5] C. M. Bishop; "Pattern recognition and machine learning", New York, springer, (2006).
- [6] L. K. Grover; "A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search"; Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM, New York. (1996) 212-219.
- [7] D. Shapira, M. Shay, O. Biham; "Effect of unitary noise on Grover's quantum search algorithm"; Physical Review A, 67, No. 4 (2003) 042301.
- [8] P. J. Salas; "Noise effect on Grover algorithm"; The European Physical Journal D 46, No. 2. (2008) 365-373.

فرض $L_{1,x} = \sqrt{\kappa_{1,x}(t)}\sigma_x^{(1)}$, $L_{2,x} = \sqrt{\kappa_{2,x}(t)}\sigma_x^{(2)}$ و با فرض $\kappa_{1,x} = \kappa_{2,x} = \kappa$

$$\frac{1}{256} e^{-4\kappa t} (-109 + 2e^{2\kappa t} + 181e^{4\kappa t}) \quad (12)$$

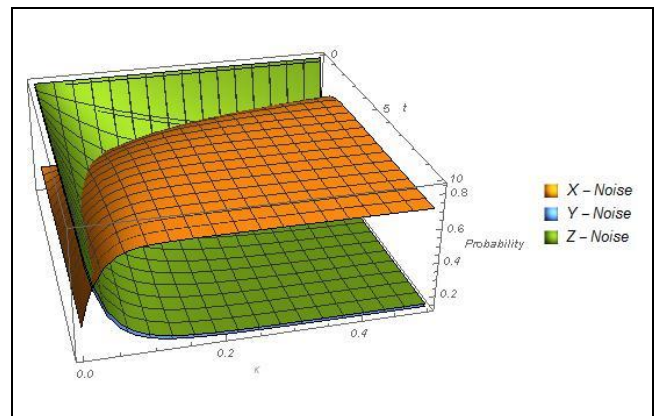
و برای نوفه‌ی $L_{1,z} = \sqrt{\kappa_{1,z}(t)}\sigma_z^{(1)}$, $L_{2,z} = \sqrt{\kappa_{2,z}(t)}\sigma_z^{(2)}$ با فرض $\kappa_{1,z} = \kappa_{2,z} = \kappa$ حاصل می‌شود

$$\frac{9}{32} e^{-3\kappa t} [2\cosh(\kappa t) + \cosh(3\kappa t)] \quad (13)$$

و برای نوفه $L_{1,y} = \sqrt{\kappa_{1,y}(t)}\sigma_y^{(1)}$, $L_{2,y} = \sqrt{\kappa_{2,y}(t)}\sigma_y^{(2)}$ با فرض $\kappa_{1,y} = \kappa_{2,y} = \kappa$ بدست می‌آید.

$$\frac{1}{128} e^{-3\kappa t} [16 + e^{-6\kappa t} (24 + 32e^{2\kappa t} + 33e^{4\kappa t})] \quad (14)$$

شکل (۳) نشان می‌دهد که بیشینه‌ی احتمال در این حالت نیز متعلق به نوفه‌ی Z است. ولی تفاوت اساسی در این شکل نسبت به شکل (۱) در نوفه حالت X رخ داده است که نشان می‌دهد با افزایش زمان احتمال شناسایی الگو کاهش نمی‌یابد. نکته‌ی دیگری که از این نمودار برداشت می‌شود و در شکل (۴) نیز به خوبی نشان داده شده است رفتار تقریباً مشابه نوفه‌های در راستای Z و Y است.



شکل ۳- شناسایی الگوها در حالت "غیر شامل" را نشان می‌دهد که چهار نوفه‌های بیت گردان، فاز گردان و بیت فاز گردان شده‌اند. در این شکل مشاهده می‌شود که نوفه‌های فاز گردان و بیت-فاز گردان به شکل مشابهی بر روی الگوها تاثیر می‌گذارند.

بیشینه احتمال برای برهم‌نهی غیرشامل برابر با ۸۴ درصد است که در شکل (۴) نشان داده شده است، که نسبت به حالت شامل حدود ۳۴ درصد بیشتر است.

نتایج

شناسایی الگو توسط الگوریتم جستجوی گراور در محیط‌های نوفه