

اثر دما بر الگوریتم تعمیم یافته گراور در مدل سه کیوبیتی XX هایزنبرگ

رضایی فرد بوساری، عماد^۱؛ آقاپار، کوروش^۱

دانشکده علوم، گروه فیزیک دانشگاه ارومیه، ارومیه^۱

چکیده

در این مقاله اثر دما بر عملکرد الگوریتم تعمیم یافته گراور در مدل سه کیوبیتی XX هایزنبرگ ارائه شده است، همچنین اثر درهم‌تنیدگی گرمایی بر عملکرد سیستم سه کیوبیتی در حین جستجوی الگوریتم گراور بررسی شده است. به دلیل تاثیر غیر قابل انکار دما بر روی کلیه فرآیندهای فیزیکی، بررسی اثر دما بر روی الگوریتم جستجوی گراور بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

Effect of temperature on generalized Grover's algorithm in three-qubit XX Heisenberg Model

Rezaei Fard Boosari, Emad¹; Aghayar, Korosh¹

Faculty of science, Department of Physics, University of Urmia, Urmia¹

Abstract

In this paper, a generalized Grover's algorithm in three-qubit XX Heisenberg model has been studied. We investigate the effect of thermal entanglement of a three-qubit system in the searching process. Because of unambiguous effect of temperature on physical systems, the study of this effect on Grover's algorithm is very important.

PACS No. 80, 89

استفاده از یک عملگر یکانی عام به جای استفاده از عملگر

الگوریتم گراور اشاره کرد [۳-۴].

در این مقاله ابتدا الگوریتم گراور به حالت‌های آمیخته در فرمول‌بندی ماتریس چگالی تعمیم داده می‌شود، سپس در بخش بعدی با معرفی مدل سه کیوبیتی XX هایزنبرگ، به بررسی عملکرد الگوریتم تعمیم یافته گراور در دمای T بر روی این سیستم می‌پردازیم، در پایان احتمال موفقیت الگوریتم را با توجه به درهم‌تنیدگی گرمایی این سیستم مورد بررسی قرار خواهیم داد.

ساختار الگوریتم گراور

الگوریتم گراور برای یافتن حالت مورد نظر $|z\rangle$ در یک پایگاه داده نامنظم به کار برده می‌شود، این الگوریتم با بکارگیری عملگر هادامارد و عملگر گراور این کار را در سه مرحله به صورت زیر انجام می‌دهد.

مقدمه

الگوریتم گراور [۱] یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌های کوانتومی در زمینه محاسبات کوانتومی است. این الگوریتم می‌تواند داده‌ای خاص را در یک پایگاه اطلاعاتی^۱ متشکل از N داده، تنها با $O(\sqrt{N})$ جستار^۲ پیدا کند، این در صورتی است که یک کامپیوتر کلاسیکی حداقل بعد از یک جستجو با $O(N)$ جستار به جواب صحیح می‌رسد.

چندین تعمیم از الگوریتم گراور تا کنون به انجام رسیده است، که در این میان می‌توان به آماده‌سازی حالت اولیه الگوریتم توسط حالت‌های دلخواه خالص [۲] و همچنین

1- Database

2- Query

مراحل الگوریتم گراور :

(۱) آماده‌سازی حالت اولیه ثابت به صورت: $|\psi_0\rangle = H^{\otimes n} |\bar{0}\rangle$

$$(|\bar{0}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \dots \otimes |0\rangle \text{ و } H^{\otimes n} = H \otimes H \dots \otimes H)$$

(۲) اعمال n مرتبه عملگر گراور G بر روی حالت $|\psi_0\rangle$.

(۳) اندازه‌گیری حالت نهایی بدست آمده در مرحله‌ی (۲).

عملگر گراور G معرفی شده در مرحله دوم را می‌توان به صورت

زیر نشان داد:

$$G = DR \quad (1)$$

$$D = -I + |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \quad (2)$$

$$R = I - |z\rangle\langle z| \quad (3)$$

در این الگوریتم حالت اولیه یک برهم نهی از تمام حالت‌ها

موجود در فضای هیلبرت سیستم است، این حالت اولیه یک حالت

خالص است. الگوریتم گراور می‌تواند در زمانی بهینه حالت مورد

نظر را با احتمال بالایی پیدا کند که این زمان بهینه برابر است با:

$$T = \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \quad (4)$$

تعمیم الگوریتم گراور

در این مقاله برای تعمیم الگوریتم گراور از حالت‌های آمیخته

به جای حالت‌های خالص استفاده شده است، این حالت‌ها زمانی

مفید واقع می‌شوند که سیستم کوانتومی با محیط خود جفت شده

باشد، و نتوان محیط را به صورت دلخواه تعیین کرد، در نتیجه

چون حالت سیستم کل (سیستم اصلی به علاوه‌ی محیط) را نمی-

توان با یک حالت خالص نمایش داد باید سیستم در یک حالت

آمیخته تعریف شود.

یک سیستم که در حالت آمیخته قرار دارد می‌تواند به صورت

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

سیستم با احتمال p_i در حالت خالص $|\psi_i\rangle$ قرار دارد، که

برای p_i ها شرط بدیهی ($\sum_i p_i = 1$) برقرار است. وقتی که یک

عملگر یکانی مانند U بر روی یک حالت آمیخته که با ماتریس

چگالی ρ توصیف می‌شود اثر کند، آن را به حالت

$$\rho = \sum_i p_i U |\psi_i\rangle\langle\psi_i| U^\dagger$$

از ماتریس را بطور مستقل انتقال می‌دهد.

حال برای استفاده از حالت‌های آمیخته در الگوریتم گراور به

منظور وارد کردن اثرات محیط، الگوریتم را در فرمول بندی

ماتریس چگالی بازنویسی می‌کنیم:

(۱) آماده‌سازی اولیه سیستم کل (سیستم اصلی به علاوه‌ی محیط)

به صورت:

$$\rho_0 = \rho_s \otimes \rho_e = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (5)$$

(۲) تکرار کردن n مرتبه الگوریتم به صورت زیر:

$$\rho'_{s,e} = (G^n \otimes I) \rho_0 (G^n \otimes I) \quad (6)$$

(۳) اندازه‌گیری حالت بدست آمده در قسمت (۲).

باید توجه داشت که قبل از اندازه‌گیری ماتریس چگالی سیستم کل،

باید از محیط رد گرفته شود تا ماتریس کاهش‌یافته^۱ سیستم کل

بدست آید:

$$Tr_e(\rho'_{s,e}) = \rho'_s \quad (7)$$

این اندازه‌گیری بر روی حالت سیستم اصلی که با ρ'_s نشان داده

شده است انجام می‌گیرد، احتمال اندازه‌گیری حالت مورد نظر در

این شرایط عبارت است از:

$$prob(z) = Tr(M_z M_z^\dagger \rho'_s) \quad (8)$$

که M_z ها عملگرهای اندازه‌گیری هستند، که در

شرط $\sum_z M_z M_z^\dagger = 1$ صدق می‌کنند. حال به راحتی می‌توان

این فرمول‌بندی را برای بررسی سیستم‌هایی که با محیط جفت

شده‌اند و یا اثرات نوفه آنها را مختل کرده است مورد استفاده قرار

داد، همچنین می‌توان به بررسی گرمایی الگوریتم گراور پرداخت.

بررسی گرمایی الگوریتم گراور در مدل سه کیوبیتی

XX هایزبرگ:

یک هامیلتونی هایزبرگ شامل سه کیوبیت که در آن کیوبیت‌های

مجاور با یکدیگر برهم‌کنش دارند به صورت زیر توصیف می

شود:

$$H_{xx} = \frac{J}{2} \sum_{n=1}^3 (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) \quad (9)$$

ضریب J نشان دهنده‌ی ضریب جفت‌شدگی مابین کیوبیت‌ها

است، همچنین σ^x و σ^y به ترتیب ماتریس‌های x و y هستند

که یک شرط مرزی پریودیک به صورت ($\sigma_4^x = \sigma_1^x, \sigma_4^y = \sigma_1^y$)

¹ - Reduced density matrix

برای آنها برقرار است، ویژه مقادیر و ویژه بردارهای هامیلتونی عبارتند از:

$$E_1 = E_2 = 2J \quad E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = -J$$

$$E_7 = E_8 = 0$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|011\rangle + |110\rangle)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|011\rangle + 2|101\rangle - |110\rangle)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|001\rangle + |100\rangle),$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|001\rangle + 2|010\rangle - |100\rangle)$$

$$|\psi_7\rangle = |111\rangle$$

$$|\psi_8\rangle = |000\rangle$$

حال می توان ماتریس چگالی سیستم سه کیوبیتی که در تعادل

گرمایی قرار دارد را به صورت زیر نشان داد:

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^8 \exp(-\beta H) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^8 \exp(-\beta E_i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

که $\beta = \frac{1}{T}$ است و Z تابع پارش سیستم است، که به راحتی بدست می آید:

$$Z = 2 + 4e^{\beta J} + 2e^{-\beta J} \quad (11)$$

اکنون ماتریس چگالی معرفی شده در رابطه ی (10) را به عنوان حالت اولیه ρ_0 در نظر می گیریم، و به طور دلخواه آن را برای جستجوی حالت $|000\rangle$ به کار می بریم. برای این کار مراحل معرفی شده در بخش الگوریتم تعمیم یافته ی گراور را به ترتیب انجام داده و نتایج بدست آمده را برای مدل هایزبرگ XX در ناحیه هایی که دما در سیستم ایجاد درهم تنیدگی می کند بررسی می کنیم. قابل ذکر است که کیوبیت ها در الگوریتم گراور اصل فاقد درهم تنیدگی در کلیه ی مراحل هستند و این موضوع در آنجا قابل بررسی نیست

نتایج بدست آمده از بررسی درهم تنیدگی گرمایی مدل

هایزبرگ XX [6] با توجه به معیار تلاقی¹ سیستم نشان می دهد، این هامیلتونی تنها به ازای ($J < -0.7866T$) درهم تنیده است. جدول (1) نتایج بدست آمده از الگوریتم گراور تعمیم یافته را بر روی سیستم بدون برهم کنش و مدل هایزبرگ نشان می دهد. برای سیستم هایزبرگ، احتمال موفقیت در ناحیه درهم تنیده نزدیک به صفر است و در ناحیه ای که سیستم درهم تنیدگی ندارد به خوبی با تکرار الگوریتم، افزایش می یابد.

تعداد تکرار	(a)	(b)	(c)
حالت اولیه	0/125	0/00553	0/0025
1	0/78125	0/00345	0/18755
2	0/945313	0/00086	0/42169
3	0/330075	0/00229	0/29291
4	0/012207	0/00523	0/26590
5	0/576973	0/00455	0/08878
6	0/999786	0/00143	0/37066
7	0/576973	0/00133	0/37893

جدول 1: در ستون (a) احتمالات بدست آمده برای یک سیستم سه کیوبیتی که هیچ برهم کنشی با یکدیگر ندارند، ستون (b) احتمال موفقیت الگوریتم برای سیستم هایزبرگ شامل سه کیوبیت که با یکدیگر برهم کنش دارند در ناحیه ی درهم تنیده (به ازای $J = -3.8T$)، ستون (c) احتمال موفقیت سیستم برهم کنشی در ناحیه ای که غیر درهم تنیده (به ازای $J = 3.8T$) است.

در شکل (1) نتایج بدست آمده برای هفت تکرار الگوریتم تعمیم یافته گراور در جدول (1)، رسم شده است.

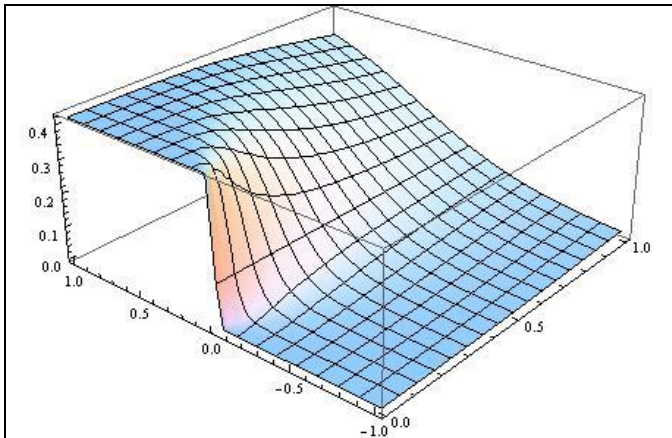
بر اساس رابطه ی (4) زمان بهینه برای رسیدن به بالاترین احتمال تکرار دوم است، که این احتمال برای سیستم هایزبرگ عبارت است از:

$$P_2(|000\rangle) = \frac{\text{Exp}(\frac{j}{T})(5 + 27\text{Exp}(\frac{2j}{T}))}{64(\text{Exp}(\frac{j}{T}) + \text{Exp}(\frac{3j}{T}))} \quad (12)$$

که به ازای ($J = 3.8T$) با نتایج بدست آمده در جدول (1) تطابق کامل دارد. به علاوه در شکل (1) به خوبی دیده می شود که کیوبیت ها در برهم نهمی الگوریتم گراور اصل به دلیل عدم وجود

¹ -Concurrence

نمی‌کند و تقریباً برابر با صفر است، اما در ناحیه‌ی غیر درهم‌تنیده الگوریتم از روابط مربوط به الگوریتم گراور پیروی می‌کند، اما با تکرار الگوریتم مقدار بیشینه‌ی آن دیگر افزایش نمی‌یابد. تمامی این نتایج زمانی اهمیت می‌یابد که بدانیم برهم‌نهی کیوبیت‌ها در الگوریتم گراور اصل در تمام مراحل الگوریتم فاقد درهم‌تنیدگی هستند و بر روی یکدیگر هیچگونه اثری نمی‌گذارند.

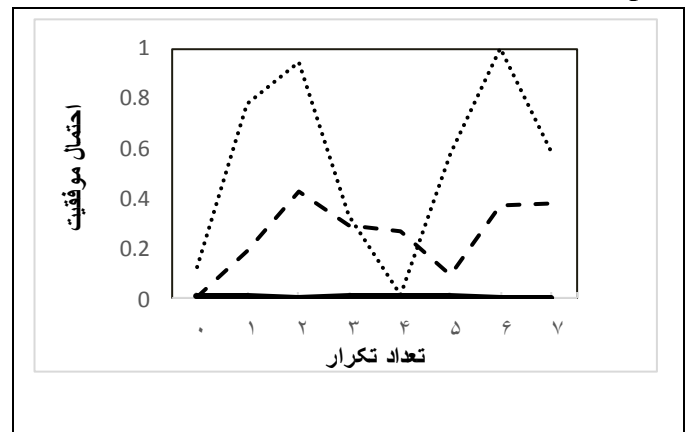


شکل ۲: احتمال موفقیت الگوریتم برای جستجوی حالت $|000\rangle$ بر حسب ضریب جفت‌شدگی و دما. محور عمودی نشان دهنده‌ی احتمال موفقیت الگوریتم و محور افقی تغییرات z را از منفی یک تا یک و مقدار دما نیز از صفر تا یک تغییر می‌کند. در ناحیه‌ای که z منفی است و سیستم در آنجا درهم‌تنیدگی دارد الگوریتم گراور هیچ افزایشی در احتمال یافت حالت $|000\rangle$ ایجاد نمی‌کند. اما در ناحیه‌ای که z مثبت است، با افزایش z ، احتمال یافت به سرعت افزایش می‌یابد و پس از رسیدن به یک مقدار بیشینه دیگر با افزایش دما و ضریب جفت‌شدگی تغییر نمی‌کند.

مرجع‌ها

- [1] L. K. Grover; "A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search"; Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM, New York. (1996) 212-219.
- [2] E. Biham, et al; "Grover's quantum search algorithm for an arbitrary initial amplitude distribution"; Physical Review A **60.4**. (1999) 2742.
- [3] L. K. Grover; "Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation"; Physical Review Letters **80.19**. (1998) 4329.
- [4] R. M. Gingrich, et al; "Generalized quantum search with parallelism"; Physical Review A **61.5**. (2000) 052313.
- [5] J. Stolze, S. Dieter; "Quantum computing: a short course from theory to experiment"; John Wiley & Sons. (2008) 156-157.
- [6] X. Wang, F. Hongchen, I. S. Allan; "Thermal entanglement in three-qubit Heisenberg models"; Journal of Physics A: Mathematical and General **34.50**. (2001) 11307.

درهم‌تنیدگی و برهم‌کنش بالاترین احتمال موفقیت را دارند، اما برای مدل هایزبرگ که کیوبیت‌ها برهم‌کنش دارند، احتمال موفقیت پایین‌تر است و در ناحیه‌ی درهم‌تنیده تقریباً برابر با صفر است. نکته‌ی بسیار مهم دیگر این است که احتمال موفقیت الگوریتم در تکرار دوم که بیشینه احتمال در آنجا قرار دارد برای ناحیه‌ای که سیستم درهم‌تنیده است با کاهش نسبت ضریب جفت‌شدگی به دما $(\frac{j}{T})$ به سمت صفر میل می‌کند و رفتار سیستم در این ناحیه مطابق با الگوی پیش‌بینی شده‌ی الگوریتم گراور نیست، اما در ناحیه‌ای که سیستم درهم‌تنیدگی ندارد با افزایش نسبت ضریب جفت‌شدگی به دما $(\frac{j}{T})$ ، احتمال موفقیت سیستم رفته رفته افزایش می‌یابد که این رفتار مطابق با الگوی الگوریتم گراور است ولی این افزایش در نقطه‌ای متوقف شده و با افزایش ضریب $(\frac{j}{T})$ تا بی نهایت مقدار آن تغییر نمی‌کند.



شکل ۱: احتمال موفقیت الگوریتم گراور برای سیستم بدون برهم‌کنش (خط نقطه‌چین). خط پررنگ در نمودار بالا نشان‌دهنده‌ی حالت درهم‌تنیده است که در تکرارهای الگوریتم گراور افزایش احتمال را نشان نمی‌دهد. خط‌چین پررنگ نشان دهنده‌ی حالت غیر درهم‌تنیده است که با تکرار الگوریتم گراور افزایش احتمال را به خوبی نشان می‌دهد.

نتایج

در این مقاله اثر دما بر الگوریتم تعمیم یافته گراور در مدل سه کیوبیتی XX هایزبرگ بررسی شد و نتایج نشان داد زمانی که مابین کیوبیت‌ها در سیستم برهم‌کنش وجود دارد رفتار سیستم بر حسب درهم‌تنیدگی به دو ناحیه تقسیم می‌شود. احتمال موفقیت در ناحیه درهم‌تنیده از روابط مربوط به الگوریتم گراور پیروی