

مطالعه تحلیلی پایداری لیزر نیمه‌رسانا کاواک خارجی با جریان تزریقی مدوله شده

مبهوتی، خسرو؛ جعفری، اکبر؛ مسلمی دهزیری، فرناز

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

چکیده

در این مقاله معادلات نرخ لیزر نیمه رسانا در حضور کاواک خارجی با در نظر گرفتن جمله نوسانی برای جریان تزریقی بازنویسی شده است. فرکانس تشدید این سیستم و معادله مشخصه بوسیله روش حل تحلیلی محاسبه شده و با توجه به فرکانس تشدید ریشه‌های معادله مشخصه محاسبه گردیده است. با در نظر گرفتن پاسخ های معادله مشخصه و فرکانس تشدید رابطه‌ای به عنوان رابطه کلی برای مقادیر بحرانی شدت پسخوراند آینه کاواک خارجی در حضور جریان مدوله شده معرفی گردیده است. همچنین با استفاده از حل عددی مستقیم معادله‌ها، نمودارهای دو شاخه شدگی و تحول زمانی صحت این فرایند مورد بررسی قرار گرفته است. کلید واژه: معادله مشخصه، روش تحلیلی، لیزر نیمه رسانا، جریان تزریقی مدوله شده.

Analytical Stability Study of External Cavity Semiconductor Laser With Modulated Pumping Current

Mabhouti, Khosro; Jafari, Akbar; Moslemi dehzi, Farnaz
Department of Physics, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia

Abstract

In this paper, by considering the oscillating terms of the injected current, the semiconductor laser rate equations in the presence of an external cavity is rewritten. The resonance frequency for this system is calculated. The characteristic equation is calculated by an analytical method. By regarding the characteristic equation solution, and the resonant frequency, a relationship can be introduced as general relation for the critical strength values of the feedback of cavity mirror in the presence of modulated current. Meanwhile, by using a direct numerical solution of the equations, diagrams of bifurcation and time series the correctness of this process is investigated and verified.

Keyword: Characteristic Equation, Analytical Method, Semiconductor Laser, Modulated Pumping Current.

مقدمه

رسانا و تحلیل پایداری این لیزرها تا کنون مورد استفاده قرار گرفته است. روش تحلیل آنالیز سیگنال کوچک [۶و۵]، روش تقریب میدان آهسته [۷] و تحلیل معادلات تاخیری به کمک تبدیلات لاپلاس و ماتریس ژاکوبین [۸] از مهمترین این روش‌ها است. از میان روش‌های ذکر شده حل تحلیلی به کمک تبدیلات لاپلاس و ماتریس ژاکوبین به منظور محاسبه معادله مشخصه همچنان مورد توجه می‌باشد [۹و ۱۰]. چرا که با استفاده از معادله مشخصه بدست آمده می‌توان اطلاعات مفیدی از سیستم دینامیکی از جمله استخراج مختصات وقوع دو شاخه شدگی هوف که دامنه ثابت را در فضای پارامتر محدود می‌کند [۱۱]، تعیین نقاط پایا برای عملکرد پایدار سیستم، محاسبه میزان میرایی و در نهایت فرکانس مربوط به سیستم دینامیکی را تعیین نمود. در این مقاله در تحلیل معادلات توجه ویژه به اولین دو شاخه شدگی هوف شده است که ناپایداری از حالت پایدار پدیدار می‌شود در صورتی که بقیه

معادلات دیفرانسیل تاخیری، دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند. این نوع معادلات در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی، سیستم‌های زیستی و از جمله دینامیک لیزری کاربرد فراوان دارند [۱]. مدل‌سازی دستگاه‌های نوری با استفاده از معادلات دیفرانسیل تاخیری (DDES) در سال ۱۹۷۹ آغاز شد. که با مشاهده آشفتگی در سیستم‌های اپتیکی و در یک سیستم الکترو هیبریدی و بعد در همه‌ی سیستم‌های نوری گسترش یافت. بررسی، درک و کنترل اثرات پسخوراند‌های تاخیری تبدیل به مسائل کلیدی در بسیاری از حوزه علم و مهندسی شده است [۲و۳]. از جمله لیزرهایی با پسخوراند تاخیری که دینامیک معادلات دیفرانسیل تاخیری نرخ لیزر به چندین پارامتر از جمله جریان تزریقی، بازدهی آینه خارجی، و طول کاواک خارجی بستگی دارد [۴]. روش‌های متنوعی برای تحلیل دینامیک لیزر نیمه

تابع پمپاژ را محاسبه نماییم. در واقع لیزر را در شرایطی قرار می دهیم تا فرکانس جریان تزریقی با فرکانس ذاتی سیستم برابر باشد. برای بررسی عملکرد لیزر تحت این شرایط لازم است تا معادلات تأخیری غیر خطی لیزر را با استفاده از روش حل تحلیلی مورد بررسی قرار دهیم.

محاسبه شرایط آستانه ناپایداری

معادلات دیفرانسیل تأخیری میدان (۱) را می توان به صورت معادلات دامنه و فاز تفکیک کرد:

$$\frac{dA}{dt} = NE + \eta E(t - \tau) \cos(\omega_0 \tau) \quad (3)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = N\alpha - \eta \frac{E(t - \tau)}{E} \sin(\omega_0 \tau) \quad (4)$$

برای تحلیل معادلات دیفرانسیلی تأخیری جواب های حالت پایا را $A' = \phi' = N' = 0$ به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$N_S = -\eta \cos(\omega_0 \tau) \quad (5)$$

$$\phi_S = -\eta(\alpha \cos \phi + \sin \phi) \quad (6)$$

باتوجه به رابطه (۶) داریم

$$\tan(\phi) = -\alpha \quad \& \quad \phi = -\arctan(\alpha) \quad (7)$$

$$\sin(\phi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad \& \quad \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (8)$$

پس باتوجه به روابط (۷) و (۸) و جایگذاری در رابطه (۵) می توانیم رابطه (۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$N_S = -\frac{\eta}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (9)$$

$$|A_S|^2 = \frac{P_0 + P \sin(\omega t) - N}{(1+2N)} \quad (10)$$

به دلیل تأخیری بودن معادلات دیفرانسیلی فوق برای تحلیل معادلات از تبدیل لاپلاس جدول (۱) استفاده می کنیم:

جدول (۱) تبدیلات لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-t_0 s} F(s)$

ماتریس ژاکوبین معادلات دیفرانسیلی (۱) و (۳) و (۴) همچنین دترمینان ماتریس را باتوجه به جواب حالت پایا N, ϕ, A بدست

$$\text{می آوریم } (T \equiv \frac{1}{\epsilon})$$

دو شاخه شدگی ها از حالت ناپایدار پدیدار می شوند. پاسخ های حالت پایا میدان و وارونی انبوهی لیزر در معادله مشخصه بدست آمده از معادلات نرخ لیزری جایگذاری می گردد تا ریشه های معادله مشخصه را برای تحلیل آستانه ناپایداری (دو شاخه شدگی هوف) محاسبه نماییم. همچنین مقدار فرکانس ذاتی سیستم لیزر را با استفاده از حل تحلیلی محاسبه نموده و با جایگذاری این مقدار برای فرکانس در معادلات نرخ لیزری شرایط کارکرد لیزر را در حالت تشدید بررسی می کنیم. برای وارد کردن مقدار فرکانس به عنوان فرکانس تشدید لیزر، جمله ای از معادلات نرخ لیزر را تغییر می دهیم. با در نظر گرفتن مقدار نوسانی برای مقدار دمش جریان الکتریکی به لیزر این هدف تامین می گردد.

مدل ریاضی

در این بخش به معرفی معادلات نرخ لیزری می پردازیم. معادلات نرخی که در نظر می گیریم معادلات بی بعد شده می باشند که شامل مقادیر میدان (ترکیبی از قسمت حقیقی و موهومی و وارونی انبوهی) است. در این معادلات پارامترهای E میدان الکتریکی بهنجار شده، N وارونی انبوهی، α فاکتور پهن شدگی، ϕ فاز پسخوراند، η شدت پسخوراند، T نسبت بین طول عمر کاواک به طول عمر حامل بار الکتریکی (الکترون)، P دامنه جریان متغیر، P_0 دامنه جریان ثابت و τ میزان تأخیر زمانی کاواک خارجی است. در معادله (۱) $\phi = \omega_0 \tau$ (مقادیر ثابت استفاده شده در معادلات $P_0 = 1/8, P = 1/8, T = 1710, \alpha = 5, \eta = 0.455$) را در نظر می گیریم [۸]:

$$\frac{dE}{dt} = (1 + i\alpha)NE + \eta E(t - \tau)e^{-i\phi} \quad (1)$$

$$\frac{TdN}{dt} = P_0 + P \sin \omega t - N - (1 + 2N)|E|^2 \quad (2)$$

در معادله دیفرانسیل (۲) جمله پمپاژ را به صورت $(P_0 + P \sin \omega t)$ در نظر می گیریم. مقدار P_0 مقداری است ثابت (جلوگیری از خاموش شدن لیزر) و $P \sin \omega t$ به عنوان عامل نوسانی خارجی است تا بتوان عملکرد لیزر را در بازه فرکانس تشدید مورد بررسی قرار داد. بدین منظور در ابتدا لازم است تا با محاسبه فرکانس تشدید مقدار مناسب فرکانس انتخابی برای

$$N\varepsilon \sin(\sigma\tau) \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) + N^2 \varepsilon (1 + \cos(\sigma\tau)) \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) + N^2 \alpha^2 \varepsilon (1 + \cos(\sigma\tau)) + 2N^2 \alpha^2 \varepsilon (1 + \cos(\sigma\tau)) \times \left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right) - 2N\varepsilon (P_0 + P \sin(\omega\tau) - N) \times (1 + \alpha^2) \quad (16)$$

حال برای بدست آوردن ریشه‌های معادله مشخصه ابتدا باید فرکانس تشدید را با توجه به بخش بعدی که شرایط بدست آوردن فرکانس تشدید را بررسی می‌کند محاسبه نماییم و به تحلیل شرایط آستانه ناپایداری معادله مشخصه بپردازیم.

محاسبه شرایط فرکانس تشدید

برای محاسبه فرکانس تشدیدی ابتدا فرکانس ذاتی سیستم را با حل تحلیلی محاسبه نموده ($\lambda = i\omega$) را در معادله مشخصه (۱۱) قرار می‌دهیم) و بدون در نظر گرفتن جمله نوسانی جریان (ثابت گرفتن جریان) قسمت حقیقی و موهومی را تفکیک می‌نماییم. سپس، با در نظر گرفتن تقریب $O(\varepsilon^{1/2})$ از قسمت موهومی مقدار فرکانس را محاسبه می‌نماییم. که داریم: $\omega_R \equiv \sqrt{(2P\varepsilon)}$ حال فرکانس تشدیدی بدست آمده را که مقدار آن (10459 HZ) است در معادلات (۱۵) و (۱۶) قرار داده و با استفاده از تقریب $N = O(\varepsilon)$ می‌توانیم معادلات (۱۵) و (۱۶) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sigma^3 - \sigma^2 N \sin(\sigma\tau) + \sigma(-2\varepsilon(P_0 + P \sin(\omega\tau))) = 0 \quad (18)$$

$$\sigma^2 (N(1 + \cos(\sigma\tau)) + N + \varepsilon \times \left(1 + \frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)) = 0 \quad (19)$$

که معادله (۱۸) قسمت موهومی و معادله (۱۹) قسمت حقیقی است که با توجه به قسمت حقیقی مقدار N (وارونی انبوهی) را محاسبه، معادله (۲۰) را در معادله (۱۸) قرار داده و σ که ریشه معادله است محاسبه می‌نماییم:

$$N = -\varepsilon \left(\frac{1 + 2(P_0 + P \sin(\omega\tau))}{2 + \cos(\sigma\tau)}\right) \quad (20)$$

$$-\lambda^3 + S_1 \lambda^2 + S_2 \lambda + S_3 = 0 \quad (11)$$

که به ترتیب S_1, S_2, S_3 به صورت زیر می‌باشد:

$$S_1 = (-N(1 + e^{-\lambda\tau}) - N + \varepsilon \times \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right)) \quad (12)$$

$$S_2 = -N^2(1 + e^{-\lambda\tau}) + N\varepsilon \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right)$$

$$N\varepsilon(1 + e^{-\lambda\tau}) \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) - 2\varepsilon (P_0 + P \sin(\omega\tau) - N) \quad (13)$$

$$S_3 = N^2 \varepsilon (1 + e^{-\lambda\tau}) \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) +$$

$$N^2 \alpha^2 \varepsilon (1 + e^{-\lambda\tau}) + 2N^2 \alpha^2 \varepsilon (1 + e^{-\lambda\tau}) \times \left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right) - 2N\varepsilon \alpha^2 \times$$

$$(P_0 + P \sin(\omega\tau) - N) - 2N\varepsilon (P_0 + P \sin(\omega\tau) - N) \quad (14)$$

حال با توجه به معادله مشخصه (۱۱) می‌توانیم ریشه‌های معادله را محاسبه و به تحلیل آستانه ناپایداری (دو شاخه‌شدگی هوف) بپردازیم. پس ابتدا $\lambda = i\sigma$ را در نظر می‌گیریم [۱۱]، و در معادله (۱۱) قرار داده و قسمت‌های حقیقی و موهومی را تفکیک می‌نماییم. در معادلات تفکیک شده زیر معادله (۱۵) قسمت موهومی و معادله (۱۶) قسمت حقیقی معادله مشخصه می‌باشد:

$$\sigma^3 - \sigma^2 (N \sin(\sigma\tau)) + \sigma(-N^2 - N^2 \cos(\sigma\tau)) + N\varepsilon(1 + \cos(\sigma\tau)) \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right)$$

$$+ N\varepsilon \left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) -$$

$$2\varepsilon(P_0 + P \sin(\omega\tau) - N) - N^2 \varepsilon \sin(\sigma\tau) \times$$

$$\left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) - N^2 \alpha^2 \varepsilon \sin(\sigma\tau) \times$$

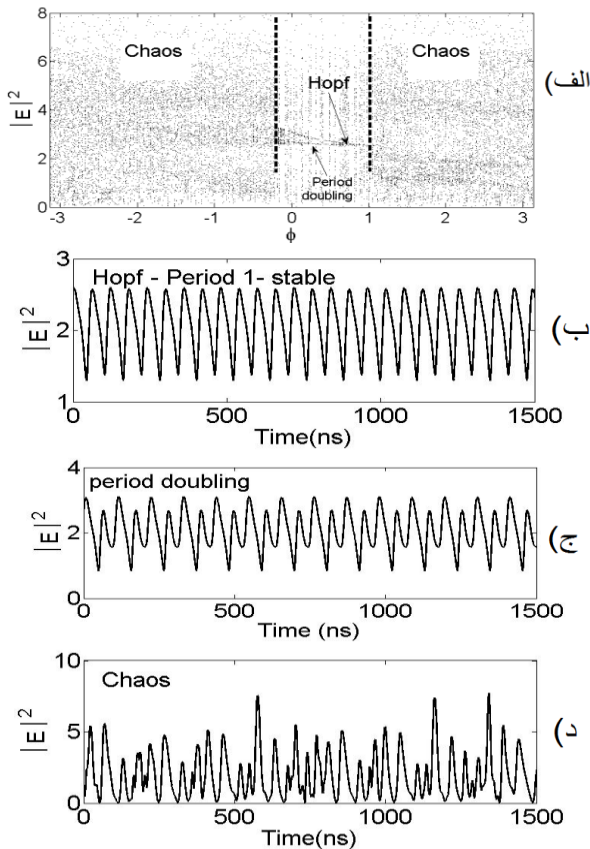
$$\left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right) \quad (15)$$

$$\sigma^2 (N(1 + \cos(\sigma\tau)) + N + \varepsilon \times$$

$$\left(1 + 2\left(\frac{P_0 + P \sin(\omega\tau) - N}{1 + 2N}\right)\right)) + \sigma(-N^2 \sin(\sigma\tau) +$$

ارائه نتایج و نتیجه گیری:

جریان تزریقی نوشته شده است ($\eta = -N\sqrt{1+\alpha^2}$) که N از رابطه شماره (۲۰) محاسبه می شود).



شکل (۱-الف). نمودار دوشاخه‌شدگی شدت خروجی لیزر (محور عمودی) بر حسب فاز پسخوراند ($\eta = 0.455$, $\varphi = 0.11$) رسم شده است. شکل (۱-ب) نمودار تحول زمانی در حالت پایدار (۱-ج) حالت دو شاخه‌شدگی و (۱-د) حالت ناپایدار را برای شدت خروجی لیزر (محور عمودی) و تغییر زمان (محور افقی) را نشان می دهد.

مرجع‌ها

[۱] E. Scholl, H.G. Schuster (Eds.), Handbook of Chaos Control, seconded, Wiley- VCH, Weinheim, (2007).
 [۲] M. C. Mackey, M. Santillan, M. Tyran-Kaminska, and E. S. Zeron, Simple Mathematical Models of Gene Regulatory Dynamics (Springer, Berlin, 2016).
 [۳] E. Witrant, E. Fridman, O. Sename, and L. Dugard, Recent Results on Time-Delay System: Analysis and Control (Springer, Berlin, 2016), Vol. 5.
 [۴] L. Weicker, T. Erneux, D. Wolfersberger, M. Sciamanna, Physical Review E, **92** (2015) 022906.
 [۵] A. Uchida, N. Shibusaki, S. Nogawa, and S. Yoshimori, Phys. Rev. E, **69**, 056201 (2004).
 [۶] A. Murakami, Phys. Rev. E, **65**, 56617 (2002).
 [۷] N. Dokhane, G. P. Puccioni, and G. L. Lippi. Phys. Rev. A **85**, 043823 (2012).
 [۸] J. Ohtsubo, Semiconductor lasers: stability instability and chaos, Springer 2017.
 [۹] L. Weicker, G. Friant, T. Erneux, Physical Review E, **96** (2017) 032206.
 [۱۰] W. Zou, M. Zhan, J. Kurth, Physical Review E, **95** (2017) 062206.
 [۱۱] G. Friant, G. Van der Sande, G. Verschaffelt, T. Erneux, Physical Review E, **93** (2016) 052201.

حال برای اینکه محاسبات و ریشه‌های بدست آمده از معادلات مشخصه را تایید نماییم، به صورت مستقیم معادلات (۱) و (۲) را حل عددی می‌نماییم. به ازای هر مقدار بدست آمده از معادله مشخصه برای N می‌توان شدت پسخوراند آینه خارجی را مشخص نمود (با استفاده از پاسخ‌های حالت پایا). بدین ترتیب که در حل عددی نیز احتیاج به یک مقدار برای شدت پسخوراند داریم، پس با جایگذاری N در معادله (۹) می‌توانیم برای شدت پسخوراند معادله‌ای بدست آورد ($\eta = -N\sqrt{1+\alpha^2}$). مقدار N بدست آمده از معادله (۲۰) را در آن جایگذاری می‌کنیم. انتظار داریم با توجه به مقدار بدست آمده ($\eta = 0.133$) که از مرتبه $O(10^{-2})$ است، دوشاخه‌شدگی هوف برای ضرایب شدت پسخوراند از مرتبه $O(10^{-2})$ داشته باشیم. همچنین با توجه به رابطه (۷) می‌توانیم فاز پسخوراند را بدست آورد ($\varphi = 0.8$)، که با استفاده از ریشه‌های بدست آمده از معادلات (۱۸) و (۲۰)، $\sigma = 0.418$, $N = -0.026$ محاسبه شده).

در نتیجه با توجه به نمودار بدست آمده حاصل از حل عددی معادلات نرخ لیزری، شکل (۱-الف) یک نقطه هوف از مرتبه $O(10^{-2})$ قابل مشاهده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود بعد از نقطه هوف سیستم لیزری به سمت دوشاخه‌شدگی و نهایتاً ناپایداری پیش می‌رود. این شکل با در نظر گرفتن فرکانس جریان تزریقی برابر با فرکانس محاسبه شده ($\omega_R \equiv \sqrt{2P\mathcal{E}}$) رسم شده است. در واقع هدف از این امر هدایت عملکرد لیزر از حالت پایدار به حالت تشدید و ناپایدار است. شکل (۱-ب) تایید می‌کند که لیزری که در حالت نوسانی پایدار قرار دارد با نزدیک شدن مقدار فاز پسخوراند به مقدار فرکانس تشدید از حالت پایدار به حالت ناپایدار (شکل ۱-د) تغییر می‌یابد. این در حالی است که در قبل از این ناپایداری شرایط کارکرد لیزر از حالت تک مد (شکل ۱-ب) به حالت دو مد (شکل ۱-ج) منتقل خواهد شد، که تایید کننده بروز نقطه دو شاخه‌شدگی هوف می باشد. به عنوان نتیجه، این مقاله رابطه‌ای را برای مقادیر بحرانی شدت پسخوراند ارائه می‌کند که با در نظر گرفتن تاثیر فرکانس